「正多角形の対角線の性質と曲面への射影」授業の流れと解説

＊指導案と一緒にご覧いただくと分かりやすいと思います。
＊以下は，生徒向けに授業の連絡をした時の授業内容の説明です。

内　容：　1 校時　プログラムを作って正多角形の対角線を描く。
2 校時　正多角形の対角線の性質。
3 校時　対角線できれいな図を描こう！
4 校時　地図の図法で平面の図を球面に射影して動かして立体視をしてみよう。

持ち物：　鉛筆，消しゴム，色ペン，直定規（長さ１５㎝ 以上のもの），データを持ち帰りたい人は FD または USB メモリを準備。

【1 校時】

導入の各自プリントの正ｎ角形に対角線を描くのは，割と速く描けていた。自分の手で描く作業は，あった方が良い。「ｎが増えると対角線の本数が増えてくるので，コンピュータで自動的に描けるようにしてみよう。もっと大きなｎのときの対角線の様子を観察してみよう。」ということで，GRAPES を起動させた。この後，対角線の本数とｎとの関係式を考えようとしている生徒がいた。

授業を受けた生徒 12 名中 GRAPES が全く初めてという生徒が 2 名，自分で操作をするのは初めてという生徒が 8 名，自分で操作もしたことがある生徒が 2 名であった。ほとんどの生徒が，使うのは初めてという状況で，各自 1 人 1 人操作をして，点を打つ，線を引く，プログラムを書くという操作に取り組んだ。

個人差はあるが，互いに教えあって進めることができた。スクリプト（GRAPES 内のプログラム）を使って自動的に正ｎ角形や対角線を描かせたことで，手描きでは描けないような大きなｎの値の場合を描いて見ることができて，『対角線の規則性』や『幾何学的な美しさ』に触れたり，『不思議さを感じた』というように，普段イメージする対角線とは違う新鮮な視点から授業を展開することができた。

また，自分で書いたプログラムで図が描けたときの生徒の反応は大きかった。時間が取れれば，自分でファイルを作らせるのは良いと思う。

【2 校時】

GRAPES でｎ=6 から 18 位までを描いて，対角線について気付くことを発言させた。生徒の発言は，「ｎが偶数のときは，対角線が中心を通る。」「奇数のときは，中心を通らない。」

「ｎが偶数，奇数どちらのときも真中に正ｎ角形ができる。」「ｎが大きくなると，中心に円がいくつもできる。」など，ｎの偶奇による違いと共通なことについては素早く見つけることができた。

対角線の交点についての発言がでなかったので，指導上の留意点展開①にあるように，交点に注目をさせるために，

T：「対角線が何本も１カ所で交わっているものはありませんか？」

S：「？」

T：「じゃあ，例えば 3 本の対角線が交わっているのは何角形？」

S：「6 角形」「8 角形」「10 角形」「偶数のとき。」

T：「奇数のときは，3 本が交わっているのはある？」

S：「ない。」

T：「偶数だとあって，奇数だとない。何故だろう？」

S：「う～ん。」

T：（ここで，2 本の直線が交わるのは別に不思議ではないけど，3 本以上の直線が 1 カ所で交わるのは偶然には起こらない，理由があるはずという話をする。）

「その，理由を考えてみよう。正 12 角形を各自描いて，何本の対角線が１点で交わっているか見てみてください。何本の場合がありますか？」

S：「3 本。」

T：「それだけ？プリント右側の正 12 角形で 3 本以上の対角線が交わっている点を，3 色の色に分けてみました。それぞれどんな分け方をしているか分かる？」

S：「緑は，3 本の対角線が交わっている。」

「赤は，4 本の対角線。」「青は，3 本の対角線。」

T：「緑と青はどちらも 3 本だけど，何が違ってるの？」

S：「線が真中を通っているかいないか。」

T：「その通り。そこで，緑は中心を通っているから，何か直感でも 3 本の線が交わることは当たり前に感じてしまうから今回は説明は飛ばし。赤は，4 本交わっているから，ちょっと大変そうなので，同じく飛ばし。」

S：「(^ ^;)えー，いいの？」

T：「はい，いいんです。そして最後に残った，どの対角線も中心を通らない青の点の場合で，3 本の対角線が交わる理由を考えて見ましょう。」

（ここでは，生徒の数学の力を考慮して，こちらで誘導するかたちで，テンポ良く進めるようにした。生徒には，それでも難しかったようだが一応納得してもらえたと思う。）

＊参考までに，途中までのやり取りを記しておく。

T：「（プリント右下の画像を生徒機 PC の間のモニターに映して，画面マーカーを使って書き込んで説明）AC とｋ，CB とｋのなす角はどんな関係？」

S：「等しい。」
T：「なんで？」　S：「なんとなく」「等しいんでしょ」「等しいって感じ」等の返事。
T：「正 12 角形だからひとつの辺（弧）が中心に作る角は，360°÷12=30°，じゃあ円周上につくる角は，何度？」
S：「15°」
T：「それって，どの辺から円周上に角をとっても，みんな...」
S：「15°，あ，だから等しいんだ。」
T：「そう。AC と BC は直線ｋと等しい角度になっているから，ｋに関して対称になっているよね。」
S：「うん。」
T：「AB とｋは，どう交わっている？」
S：「90 度！」「直角？」
T：「何で？」　S：「...。」
T：「C と A の角は？」
S：「C が 15°2 つで 30°，A が 4 つで 60°，あっだから 90°だ。」　（以下省略）
等のやり取りを進めて，結局，
『AC，BC は直線ｋに関して対称。
AB⊥ｋより，点 A，B はｋに関して対称な点。
∠BAR=∠ABR=45°より，直線m，ｎはｋに関して対称な直線。
よって，m，ｎはｋの上で交わる。
つまり，ｋ，m，ｎの 3 本の対角線は 1 点で交わる。』
と説明しました。（参考文献：数学教育 2007/2 月号本文および，大教大附池田校舎友田勝久先生の HP 数学論文『正 18 角形の対角線』　指導案参考文献 2）参照。）

まとめでは，3 本の対角線が交わるためには，対称性や角の二等分線等の性質が関係していることを生徒と確認した。奇数角数では 3 本以上の対角線が 1 点で交わらない理由が，生徒のことばでは，「円周角が割り切れない数になる」や「中に二等辺三角形や正三角形ができなくなる」という表現になった。

生徒が見つけた範囲で，正多角形の対角線の 3 本以上の線が交わるときには，対角線によって二等辺三角形など対称性の高い図形ができていることを中心にまとめた。

【3 校時】

最初に，プリントにある正 12 角形にm＝2k の場合の対角線を描いて，m=ak の意味を理解できるようにした。図の確認は，生徒機 PC 間のモニターにプリントを映して行った。

「正ｎ角形対角線変化版_1.gps」で，ｎを 12 から 30→60→120 と増やし，対角線の本数が増えると曲線の形がはっきりしてくる様子を見ると同時に，a=3 の場合もｎ=12 から示し

ていった。時間の関係で，手で描く作業は，ｎ=12，a=2 の１つの場合だけにしたが，集中力のある生徒ならもっと描かせてみた方がいいのかも知れない。

プリントに従って，進めさせた。しかし，パソコンを連続して使い続けて 3 時間目になるため，生徒はかなり疲れがたまっていた。それでも熱心にいろいろな場合の包絡線を描いてカラープリンタで印刷をしていた。実際のところ，教師の方もこの時間は疲れが出てしまい，多くの時間，生徒の自由な活動を見て回り，生徒が見つけたおもしろい a の値を紹介したり，質問に答えたりしていた。生徒は疲れてきたとはいえ，a が正・負・整数・分数・無理数など実にいろいろな値で図を描いていた。

教師が誘導したのは，a=‐2 の場合に 3 本の対角線が「全て」1 点で交わることを確認したことである。この場合，多角形の外部に直線の包絡線によるデルトイドが描かれる。デルトイドの内部では 3 本の直線がすべて 1 点で交わるのは，2 時間目の証明を考えると，何か理由があるのではないかという話をして，とてもきれいで個人的には一番気に入っている a の値だと強調した。包絡線については，たくさんの直線によって描かれる曲線だという表現で簡単に説明した。

まとめとしては，対角線の『一部』を描いたときに，包絡線によっていろいろな曲線が描かれ，とてもきれいで模様のようになることを確認した。さらに，包絡線の形（方程式）が対角線 PQ の内外分点の軌跡となることなどは,動機付けや発見の過程をどうするかなど授業として取り上げるには，まだ流れを考えるなどの課題がある。そして，生徒が疑問に思うであろう a>0 のときと a<0 のときの違いをどう明らかにしていくかなど，数学的に問題を掘り下げることがどこまでできるかということも今後の課題だと思っている。

【4 校時】

先ず，地球上の陸や海をまっすぐな平面に映して地図を作るときの，3 つの作図法「正射図法」「心射図法」「平射図法」を簡単に説明した。

今回は，地図を作るときと逆に平面に描いた絵を，球面に映して動かして観察してみることを説明した。赤青立体メガネを配ると，生徒は早く見てみたいという様子であった。

プリントに従って，進めた。最初の正射図法のときから，u の値（3 校時の a にあたる。）を－2 から変えて，平面上の絵をいろいろと変えたときの射影も描かせてみた。視点（光源）から眺めると，正射影の場合は無限遠点になるので難しいが，他 2 つの場合は平面に描いた絵が球面に射影した絵とぴったり重なるので生徒にも印象的だったようだ。

ひと通り 3 つの図法を使った描画と操作について説明した後に，正射図法の方法について仕組みを考えた。プリント右下の画像ファイルを生徒機 PC の間のモニターに映して，画面マーカーを使って書き込んで説明を行った。そのとき，心射図法との違いに触れながら，平面上の絵が真上に映されることを理解させて，映された点の高さ（z 座標）が分かれば球面上に絵が描けることを説明しながら進めた。この内容は，生徒によっては始めから考えさせるとおもしろいのではないかと思っている。数学を身近な「地図」の図法に使うとい

う非常におもしろい応用例だと思うからである。（参考文献：愛知県立春日井東高校　堀部和経先生の HP　指導案参考文献 6）参照。）

パソコン連続 4 時間目になるが，生徒は再び集中していろいろな図を描いて動かしながら，交差法や立体メガネを使う方法で立体視を試みていた。交差法はコツをつかめずできないと訴える生徒もいたが，できるまで挑戦し続けていた。初めての体験で，眼が疲れたがおもしろかったという生徒が非常に多かった。気付かない身近なところで数学が活用されている例を取り上げた。数学っていろいろなところに活用することができるんだね！ということを最後に言っておしまいにしたかったのだが，生徒の活動時間が意外と長く続き，最後 5 分というところでまとめに入ったので，指導案のまとめに近いようなことを大急ぎで言って，4 時間という長〜い授業を終えた。まとめに入っても，生徒は最後まで自分で描いた空間図形を観察していた。熱心に授業に参加していた生徒達に頭が下がると同時にその様子が嬉しかった。